



<b>NOMBRE DEL PROFESOR</b>	Juan Humberto Zendejo Sánchez
<b>NIVEL ACADÉMICO Y SUBSISTEMA O DISCIPLINA</b>	Nivel Medio Superior (Bachillerato) <b>Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades</b> <b>Plantel Oriente</b>
<b>ASIGNATURA</b>	Matemáticas III Tercer semestre de bachillerato
<b>UNIDAD TEMÁTICA Y CONTENIDOS</b>	Unidad I. <b>Solución de Sistemas de Ecuaciones</b> 1.1 Situaciones que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales. 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales $2 \times 2$ y $3 \times 3$ : a) Con solución única. b) Con infinidad de soluciones. c) Sin soluciones. 1.3 Sistemas de ecuaciones equivalentes. a) Concepto. b) Forma triangular. 1.4 Métodos de reducción y de sustitución. 1.5 Sistemas de ecuaciones no lineales $2 \times 2$ : a) Con una ecuación lineal y otra cuadrática. b) Con ambas ecuaciones cuadráticas. c) El significado gráfico de su solución. d) Método de sustitución. 1.6 Problemas de aplicación.
<b>POBLACIÓN</b>	Alumnos de tercer semestre de bachillerato: Grupo 364-B (23 alumnos).
<b>DURACIÓN</b>	10 horas aproximadamente, de las cuales, se trabajarán tres sesiones (dos de dos horas y una de una hora) y cinco horas de trabajo extra clase.
<b>PROPÓSITOS</b>	<b>1. Propósitos del Plan de Estudios</b> Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones y extender de los procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica. <b>2. Propósito del profesor</b> El alumno: ✓ Recuerda el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones $2 \times 2$ , y comprende la forma en que se extiende a un sistema $3 \times 3$ . ✓ Dado un sistema de ecuaciones lineales $3 \times 3$ , utiliza el método de



	<p>suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtiene su solución.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓ En el caso de sistemas <math>2 \times 2</math>, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explica a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones.</li><li>✓ Para sistemas de ecuaciones <math>2 \times 2</math> con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), traza un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las gráficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.</li><li>✓ Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones en los que una de ellas o ambas son cuadráticas.</li></ul>
<p><b>HABILIDADES DIGITALES</b></p>	<p><b>Actividad 1. Un sistema dos soluciones</b></p> <p>Para esta actividad requerimos:</p> <p><b>A.</b> Uso de Internet.</p> <p><b>a.</b> Como fuente de información y recursos: (nivel 1 Básico).</p> <p><b>Aa1.1</b> Localización de información específica en un sitio de Internet.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere entrar a la plataforma y realizar la búsqueda de la información necesaria para el trabajo de la primera sesión, debe descargar el archivo que contiene la secuencia de trabajo la cual se encuentra publicada en la plataforma Moodle.</p> <p><b>b.</b> Como medio de comunicación: (Nivel 1 Básico).</p> <p><b>Ab1.1</b> Uso del correo electrónico. Distinción de contextos comunicativos. Uso adecuado del lenguaje.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere enviar un archivo generado durante la sesión de trabajo a una dirección de correo electrónico.</p> <p><b>C.</b> Presentación de información y procesamiento de datos.</p> <p><b>a.</b> Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado).</p> <p><b>Ca2.1</b> Manejo avanzado del procesador de textos (opciones de formato, columna, tabla, cuadro de texto, inserción de imágenes desde el disco duro, celular o cámara digital, impresión en ambas caras).</p> <p><b>Justificación.</b> El trabajo que se pide elaborar en esta secuencia se presenta en un archivo de Word complementado con tabulaciones insertadas de Excel e imágenes obtenidas de un graficador (Graphmatica).</p> <p><b>c.</b> Hoja de cálculo. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p><b>Cc2.1</b> Uso de la hoja de cálculo para registrar datos, elaborar tablas, crear fórmulas para relacionar los datos y representar resultados mediante una gráfica utilizando las opciones que ofrece la herramienta (tipos de gráficas).</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere utilizar la hoja de cálculo para realizar</p>



<p>las tabulaciones necesarias para obtener los datos de tablas que le permitan tener una aproximación del resultado que se busca en las gráficas.</p> <p><b>F.</b> Recursos tecnológicos y software especializado de apoyo a la enseñanza.</p> <p><b>a.</b> Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>F2.2 Exploración y uso básico de software especializado de apoyo a la enseñanza.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere de elaborar gráficas representativas de los sistemas de ecuaciones que se resuelven durante el transcurso de la secuencia de trabajo.</p> <p><b>H.</b> Uso de periféricos.</p> <p>H1.1 Manejo del ratón. H1.2 Manejo eficiente del teclado. H1.3 Uso de dispositivos (impresora, escáner, sensores, cámara, celular, Ipod).</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno debe demostrar destreza en el uso del ratón y el teclado ya que en el transcurso de la actividad debe realizar actividades que implican estar pasando de un formato a otro además del traslado de imágenes y tablas generadas desde un programa a otro, lo cual resulta más fácil si se hace uso de los periféricos.</p> <p><b>Actividad 2. Paso a paso.</b></p> <p>Para esta actividad se requiere:</p> <p><b>A.</b> Uso de Internet.</p> <p><b>a.</b> Como fuente de información y recursos. (Nivel 1 Básico)</p> <p><b>Aa1.1</b> Localización de información específica en un sitio de Internet.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere entrar a la plataforma y realizar la búsqueda de la información necesaria para realizar la tarea encargada, en este caso un resumen. Debe realizar la lectura en la que se incluyen las instrucciones necesarias y descargar el archivo que contiene la información en la que debe basar su trabajo y que se encuentra disponible en la plataforma Moodle.</p> <p><b>C.</b> Presentación de información y procesamiento de datos.</p> <p><b>a.</b> Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>Ca2.1 Manejo avanzado del procesador de textos (opciones de formato, columna, tabla, cuadro de texto, inserción de imágenes desde el disco</p>
--



duro, celular o cámara digital, impresión en ambas caras).

**Justificación.** El trabajo que se pide elaborar en esta actividad se debe presentar en un archivo de Word complementado con tabulaciones insertadas de Excel e imágenes obtenidas de un graficador (Graphmatica).

**F.** Recursos tecnológicos y software especializado de apoyo a la enseñanza.

**a.** Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado)

F2.2 Exploración y uso básico de software especializado de apoyo a la enseñanza.

**Justificación.** El alumno requiere de elaborar gráficas representativas de los sistemas de ecuaciones que se resuelven durante el transcurso de la secuencia de trabajo.

**H.** Uso de periféricos.

H1.1 Manejo del ratón.

H1.2 Manejo eficiente del teclado.

H1.3 Uso de dispositivos (Impresora, escáner, sensores, cámara, celular Ipod).

**Justificación.** El alumno debe demostrar destreza en el uso del ratón y el teclado ya que en el transcurso de la actividad debe realizar actividades que implican estar pasando de un formato a otro además del traslado de imágenes y tablas generadas desde un programa a otro lo cual resulta más fácil si se hace uso de los periféricos.

### **Actividad 3. Tarea: aplicando lo aprendido**

Para esta actividad se requiere:

**A.** Uso de internet

**a.** Como fuente de información y recursos: (Nivel 1 Básico)

**Aa1.1** Localización de información específica en un sitio de internet.

**Justificación:** El alumno requiere entrar a la plataforma y realizar la búsqueda de la información necesaria para el trabajo de la primera sesión, debe descargar el archivo que contiene la secuencia de trabajo la cual se encuentra publicada en la Plataforma Moodle.

**b.** Como medio de comunicación. (Nivel 1 Básico)








**Ab1.1** Uso del correo electrónico. Distinción de contextos comunicativos. Uso adecuado del lenguaje.

**Justificación.** El alumno requiere enviar un archivo generado durante la sesión de trabajo a una dirección de correo electrónico.









	<p><b>C.</b> Presentación de información y procesamiento de datos.</p> <p><b>a.</b> Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>Ca2.1 Manejo avanzado del procesador de textos (opciones de formato, columna, tabla, cuadro de texto, inserción de imágenes desde el disco duro, celular o cámara digital, impresión en ambas caras).</p> <p><b>Justificación.</b> El trabajo que se pide elaborar en esta secuencia se presenta en un archivo de Word complementado con tabulaciones insertadas de Excel e imágenes obtenidas de un graficador (Graphmatica).</p> <p><b>c.</b> Hoja de cálculo. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>Cc2.1 Uso de la hoja de cálculo para registrar datos, elaborar tablas, crear fórmulas para relacionar los datos y representar resultados mediante una gráfica utilizando las opciones que ofrece la herramienta (tipos de gráficas).</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere utilizar la hoja de cálculo para realizar las tabulaciones necesarias para obtener los datos de tablas, que le permitan tener una aproximación del resultado que se busca en las gráficas.</p> <p><b>F.</b> Recursos tecnológicos y software especializado de apoyo a la enseñanza.</p> <p><b>a.</b> Procesador de textos. (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>F2.2 Exploración y uso básico de software especializado de apoyo a la enseñanza.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere de elaborar gráficas representativas de los sistemas de ecuaciones que se resuelven durante el transcurso de la secuencia de trabajo.</p> <p><b>H.</b> Uso de periféricos.</p> <p>H1.1 Manejo del ratón. H1.2 Manejo eficiente del teclado. H1.3 Uso de dispositivos (impresora, escáner, sensores, cámara, celular, Ipod).</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno debe demostrar destreza en el uso del ratón y el teclado, ya que en el transcurso de la actividad debe realizar actividades que implican estar pasando de un formato a otro, además del traslado de imágenes y tablas generadas desde un programa a otro lo cual resulta más fácil si se hace uso de los periféricos.</p> <p><b>Actividad 4. Foro: ¿cuál es mejor?</b></p>
--	---



	<p>Para esta actividad se requiere:</p> <p><b>A.</b> Uso de Internet.</p> <p><b>b.</b> Como medio de comunicación, (Nivel 2 Avanzado)</p> <p>Ab2.1 Manejo de un LMS para utilizar foros. Uso de un foro para discutir un tema. Desarrollo de habilidades de argumentación y discusión colectiva a través de un entorno virtual.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno debe participar en un foro para comentar con los demás integrantes cual de los métodos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones le parece más adecuado según la experiencia adquirida durante el transcurso de la unidad.</p> <p><b>Actividad 5. Evaluación: ¿Cuánto aprendí?</b></p> <p>Para esta actividad se requiere:</p> <p><b>A.</b> Uso de Internet.</p> <p><b>a.</b> Como fuente de información y recursos. (Nivel 1 Básico)</p> <p><b>Aa1.1</b> Localización de información específica en un sitio de Internet.</p> <p><b>Justificación.</b> El alumno requiere entrar a la plataforma y resolver el examen que se encuentra publicado en la plataforma Moodle.</p>
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>➤ Sala Telmex.</li><li>➤  PC con acceso a internet .</li><li>➤  Plataforma Moodle.</li><li>➤  Hoja de cálculo (Excel)</li><li>➤  Editor de textos (Word).</li><li>➤  Graphmatica.</li><li>➤  Geogebra.</li><li>➤  Proyector (cañón).</li><li>➤ Pantalla.</li><li>➤ Problemas propuestos.</li><li>➤ Programa de actividades.</li><li>➤ Secuencia de trabajo.</li></ul>
<b>DESCRIPCIÓN DE LAS</b>	<p><b>Actividad 1. Un sistema dos soluciones</b></p> <p><b>Productos obtenidos por el alumno:</b></p>











ACTIVIDADES	
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Actividad previa: consiste en tres ejercicios en los que el alumno elabora las tabulaciones y gráficas correspondientes para los sistemas de ecuaciones propuestos.</li><li>• Archivo Word: en este archivo el alumno elabora su trabajo de la sesión presencial que debe contener: Dos ejercicios de sistemas de ecuaciones no lineales anexando para cada uno de ellos: a) el procedimiento algebraico necesario para resolver el sistema, b) la tabulación correspondiente al sistema y c) la gráfica que resulta del sistema de ecuaciones elaborada en Graphmatica.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo en el salón de clase:</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤  Se elabora y estructura el contenido de la actividad en la plataforma Moodle, revisando y poniendo a disposición del usuario los materiales necesarios para el trabajo.</li><li>➤ En la sesión previa se explica a los alumnos las actividades que se realizarán para cubrir la última parte de la unidad, se pide que el alumno revise los materiales contenidos en la Plataforma Moodle, se le pide imprimir los materiales de trabajo para tenerlos disponibles durante la sesión presencial.</li><li>➤  Sesión 1. Se organizan equipos de dos a tres alumnos, el alumno compara los resultados obtenidos al realizar la tarea incorporando para su revisión el software de Graphmatica, en el cual realiza las gráficas correspondientes a los ejercicios de tarea, comparando los gráficos realizados con los que aparezcan en su computadora.</li><li>➤  Se explica el uso de Graphmática y la aplicación que este software tiene para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.</li><li>➤ A continuación, se explican los métodos para resolver estos sistemas de ecuaciones mediante procedimientos algebraicos en los cuales se obtienen las soluciones de los sistemas y se comparan los resultados con los gráficos.</li><li>➤  Se explica el uso de Excel para generar tablas de datos que permitan tener una referencia de los puntos que conforman a las dos ecuaciones que forman el sistema con el que se trabaja.</li><li>➤  Se explica el procedimiento a seguir para armar el archivo de Word que contiene las respuestas a los ejercicios realizados por los alumnos en la sesión presencial.</li><li>➤ Explicación de la tarea que el alumno debe realizar en casa para enviar por correo electrónico y en forma individual.</li></ul> <p><b>Alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓  Resuelve los ejercicios de tarea utilizando el software de Graphmatica y compara las respuestas que se visualizan en la gráfica realizada con las obtenidas en los ejercicios realizados</li></ul>











	<p>en casa.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓ Aplica uno de los métodos explicados por el profesor para resolver los ejemplos de la sesión en su cuaderno.</li><li>✓  Construye las tabulaciones necesarias para tener las referencias de puntos que componen las ecuaciones que trabaja en la sesión.</li><li>✓  Elabora en Graphmática los gráficos correspondientes a los ejercicios.</li><li>✓  Integra el archivo de Word que debe contener los ejercicios realizados, su resolución algebraica, la tabulación realizada y la gráfica correspondiente.</li><li>✓  Envía por correo electrónico el trabajo elaborado en la sesión.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo fuera del salón de clases</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Revisará los trabajos enviados por los alumnos en la sesión presencial y responderá a cada equipo a través del correo electrónico sobre los resultados enviados y dará una retroalimentación sobre el material revisado.</li></ul> <p><b>Alumnos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪  Realiza las actividades de tarea (actividad 3).</li><li>▪  Revisa en su correo electrónico la calificación obtenida en la actividad y la retroalimentación realizada por el profesor.</li></ul> <p><b>Actividad 2. Paso a paso</b></p> <p><b>Producto obtenido por el alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Resumen.</b> En esta actividad el alumno realiza una lectura del tema Sistemas de Ecuaciones No Lineales “2 x 2” y elabora un resumen del contenido, además resuelve una actividad contenida en las páginas revisadas. El archivo generado lo envía a la plataforma para su calificación.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo en el salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤  Se elabora y estructura el contenido de la actividad en la plataforma Moodle, revisando y poniendo a disposición del usuario los materiales necesarios para el trabajo.</li><li>✓ Explica las actividades que debe realizar el alumno para cumplir con los requisitos de entrega del Resumen y el envío correspondiente a través de la plataforma Moodle.</li></ul>
--	--







	<ul style="list-style-type: none"><li>✓  Explica la ubicación dentro de la plataforma de la actividad que debe realizar el alumno.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo fuera del salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓  Revisa los archivos enviados por los alumnos para calificar y retroalimentar la actividad.</li><li>✓  Envío a los alumnos de la calificación obtenida y la retroalimentación correspondiente.</li></ul> <p><b>Alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪  Revisa en la plataforma los materiales necesarios para realizar las actividades encargadas e imprime aquellos que considera necesarios para cumplir con los requisitos solicitados.</li><li>▪  Estructura el material necesario y elabora el archivo correspondiente con el contenido solicitado en la actividad.</li><li>▪  Accede a la Plataforma y sube el archivo que contiene los materiales encargados en la actividad solicitada.</li><li>▪  Accede a la Plataforma y revisa la calificación obtenida y la retroalimentación enviada por el profesor.</li></ul> <p><b>Actividad 3. Tarea: aplicando lo aprendido</b></p> <p><b>Producto elaborado por el alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Archivo de Word: en este archivo el alumno envía la respuesta correspondiente a los ejercicios de tarea contenidos en la secuencia de trabajo bajo el siguiente formato: a) Procedimiento algebraico necesario para resolver el sistema de ecuaciones, b) Tabulación de las ecuaciones que conforman el sistema y c) La gráfica correspondiente al sistema de ecuaciones elaborada en Graphmatica.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo en el salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤  Se elabora y estructura el contenido de la actividad en la plataforma Moodle, revisando y poniendo a disposición del usuario los materiales necesarios para el trabajo.</li><li>✓ Explica los requisitos que se solicitan en el trabajo de tarea para</li></ul>
--	---



	<p>que el alumno cumpla con los parámetros que se van a calificar en la tarea.</p> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo fuera del salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>•  Revisa los materiales enviados por los alumnos y califica las actividades realizadas.</li><li>•  Envía los resultados a los alumnos por medio de la plataforma Moodle y emite la retroalimentación correspondiente.</li></ul> <p><b>Alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪  Resuelve en forma individual los trabajos encargados por el profesor, armando su archivo de contenido con los mismos requisitos que los solicitados en la sesión presencial.</li><li>▪  Accede a la plataforma Moodle para el envío del archivo que contiene los ejercicios resueltos.</li><li>▪  Accede a la Plataforma y revisa los resultados obtenidos en la actividad, así como la retroalimentación enviada por el profesor.</li></ul> <p><b>Actividad 4. Foro: ¿Cuál es mejor?</b></p> <p><b>Producto obtenido por el alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Comentario y opinión.</b> El alumno expresa y argumenta su elección de un método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales 2x2.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo fuera del salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤  Se elabora y estructura el contenido de la actividad en la plataforma Moodle, revisando y poniendo a disposición del usuario los materiales necesarios para el trabajo.</li><li>➤  Elabora la pregunta de inicio del Foro e invita a los alumnos a participar respondiendo la pregunta planteada.</li></ul> <p><b>Alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓  Participa en el foro emitiendo su opinión respecto a los métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, comenta la respuesta planteada por el profesor y opina de los comentarios emitidos por los demás compañeros.</li></ul>
--	--



	<p><b>Actividad 5. Evaluación: ¿Cuánto aprendí?</b></p> <p><b>Producto elaborado por el alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Examen de conocimientos.</b> El alumno responde un examen de conocimientos donde refleja lo aprendido en las actividades contenidas en la unidad b-learning.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo en el salón de clase</b></p> <p><b>Profesor:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤  Se elabora y estructura el contenido de la actividad en la plataforma Moodle, revisando y poniendo a disposición del usuario los materiales necesarios para el trabajo.</li></ul> <p><b>Actividades que se llevarán a cabo fuera del salón de clases</b></p> <p><b>Alumno:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>✓  Accede a la plataforma y contesta el cuestionario para revisar su avance y los conocimientos adquiridos durante la unidad trabajada en la plataforma Moodle.</li></ul>
<p><b>BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA PARA EL PROFESOR</b></p>	<p>Barnett, R. (2002). <i>Álgebra y Trigonometría</i>. México: Mc Graw Hill.</p> <p>Barnett, R. (2002). <i>Precálculo</i>. México: Limusa.</p> <p>Caballero, A. et al. (2000). <i>Geometría analítica</i>, México: Esfinge.</p> <p>Filloy, E. y Hitt, F. (1997). <i>Geometría Analítica</i>. México: Iberoamericana.</p> <p>Fuenlabrada, S. (2000). <i>Geometría Analítica</i>. México: Mc Graw-Hill.</p> <p>Fuller, G. y Tarwater, D. (1999). <i>Geometría Analítica</i>. México: Addison-Wesley.</p> <p>Holliday, B. et al. (2002). <i>Geometría Analítica con Trigonometría</i>. México: McGraw-Hill.</p> <p>Leithold, L. (1994). <i>Álgebra y Trigonometría: con Geometría Analítica</i>, México: Harla.</p> <p>Leithold, L. (1992). <i>Cálculo con Geometría Analítica</i>. México: Harla.</p> <p>Phillips, E. et al. (1990). <i>Álgebra con Aplicaciones</i>. México: Harla.</p> <p>Swokowski, E. (2002). <i>Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica</i>.</p>



	<p>México: Grupo Editorial Iberoamérica.</p> <p>Rees, P. Sparks, F. (2000). <i>Álgebra Contemporánea</i>. México: McGraw Hill.</p> <p>Torres, C. (1998). <i>Geometría Analítica</i>. México: Santillana.</p> <p><a href="http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/118/Modelo%20de%20Madurez%20en%20el%20uso%20de%20TIC%20A%20.pdf">http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/118/Modelo de Madurez en el uso de TIC A .pdf</a></p> <p><a href="http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales%20contenido/Barra%20de%20Herramientas%20en%20Moodle.pdf">http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales contenido/Barra de Herramientas en Moodle.pdf</a></p> <p><a href="http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales%20semana%203/El%20uso%20de%20la%20contrasena%20en%20Moodle.pdf">http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales semana 3/El uso de la contraseña en Moodle.pdf</a></p> <p><a href="http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales%20semana%203/Manual%20Desmatricular.pdf">http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales semana 3/Manual Desmatricular.pdf</a></p> <p><a href="http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales%20semana%203/Manual%20Grupos.pdf">http://www.salononlinea.unam.mx/habitatpuma/moodlediplomado/file.php/104/Manuales semana 3/Manual Grupos.pdf</a></p> <p><a href="http://ericaurqueta.files.wordpress.com/2007/06/quiapracticagraphmatica.pdf">http://ericaurqueta.files.wordpress.com/2007/06/quiapracticagraphmatica .pdf</a></p>
--	---

## Anexos.

<b>DATOS GENERALES ASIGNATURA</b>	MATEMÁTICAS III
<b>TÍTULO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA</b>	SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2X2
<b>AUTOR FECHA DE ELABORACIÓN FECHA DE ACTUALIZACIÓN PALABRAS</b>	JUAN HUMBERTO ZENDEJO SÁNCHEZ MARZO 2010



**CLAVE**

<b>POBLACIÓN</b>	Alumnos del tercer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.
<b>UNIDAD EN QUE SE INSERTA ESTA SECUENCIA DIDÁCTICA</b>	Matemáticas III Unidad I “Solución de Sistemas de Ecuaciones”.
<b>TIPO DE SECUENCIA (APERTURA, DESARROLLO, CIERRE)</b>	Actividad de cierre. Se recomienda insertarla en la tercera semana del semestre como una actividad de cierre de la unidad en la que previamente se realizaron las sesiones introductorias al tema de Solución de Sistemas de Ecuaciones.
<b>DURACIÓN</b>	(Seis horas) una sesión de dos horas de trabajo en aula y cuatro horas de trabajo extraclase.
<b>APRENDIZAJES ESPERADOS</b>	Los aprendizajes son tomados del programa de estudios correspondiente a la asignatura de Matemáticas III de Colegio de Ciencias y Humanidades. El Alumno: <ul style="list-style-type: none"><li>- Conceptuales<ol style="list-style-type: none"><li>1. En el caso de sistemas <math>2 \times 2</math>, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explica a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinitud de soluciones.</li><li>2. Para sistemas de ecuaciones <math>2 \times 2</math> con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), traza un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las graficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.</li></ol></li><li>- Procedimentales<ol style="list-style-type: none"><li>1. Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones en los que una de ellas o ambas son cuadráticas.</li><li>2. Aprecia que el álgebra es útil para obtener información acerca del comportamiento de algunos objetos matemáticos, como es el caso de saber si dos gráficas se intersectan o no, cuántas veces y en dónde.</li></ol></li><li>- Actitudinales<ol style="list-style-type: none"><li>1. Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones de</li></ol></li></ul>



	los tipos estudiados en esta unidad, e interpreta el sentido de la solución hallada.
<b>CONTENIDO TEMÁTICO</b>	<p>Sistemas de ecuaciones no lineales 2x2:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Con una ecuación lineal y otra cuadrática.</li> <li>2. Con ambas ecuaciones cuadráticas.</li> <li>3. El significado gráfico de la ecuación.</li> <li>4. Método de sustitución.</li> </ol> <p>Problemas de aplicación.</p>
<b>ORGANIZACIÓN</b>	<p>TRABAJO PREVIO. El trabajo previo es individual.</p> <p>PRIMERA SESIÓN. Trabajo en equipos de dos personas.</p> <p>TAREA FINAL. El trabajo es individual.</p>
<b>MATERIALES</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Un computadora por equipo conectada a Internet.</li> <li>➤ Graphmatica y/o Geogebra.</li> <li>➤ Procesador de textos (Word).</li> <li>➤ Proyector de cañón.</li> <li>➤ Impresora.</li> <li>➤ Hoja de cálculo (Excel).</li> </ul>
<b>DESARROLLO</b>	<p>SESIÓN PREVIA:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. TAREA. Tabular y graficar los siguientes sistemas de ecuaciones en el mismo plano (utiliza una hoja de papel milimétrico para cada sistema):       <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>y = 2x + 1</math>; <math>y = x^2 - 2</math></li> <li>b) <math>y - 3x = 1</math>; <math>y - x^2 = -9</math></li> <li>c) <math>y = -x - 2</math>; <math>y = x^2 - x - 2</math></li> </ol> </li> </ol> <p>PRIMERA SESIÓN:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Con ayuda de un cañón se proyectarán las gráficas correspondientes a los ejercicios dejados de Tarea en la sesión anterior apoyándose en el programa de Geogebra o Graphmatica. Analizar los gráficos obtenidos y compararlos con los realizados por los alumnos de tarea.</li> <li>2. Explicar el procedimiento algebraico para resolver los ejercicios de tarea y comparar si los puntos obtenidos coinciden con las gráficas que se realizaron para cada sistema.</li> <li>3. Resolver los sistemas de ecuaciones del punto 4 realizando las siguientes actividades:       <ol style="list-style-type: none"> <li>a. Realiza las operaciones algebraicas necesarias para resolver los</li> </ol> </li> </ol>



	<p>sistemas de ecuaciones propuestos.</p> <ol style="list-style-type: none"><li>b. Utilizando una hoja de cálculo (Excel), realiza las tabulaciones correspondientes a cada ecuación de cada sistema.</li><li>c. Utilizando Geogebra o Graphmatica elabora las gráficas correspondientes a cada sistema.</li><li>d. En un documento de Word redacta una portada que contenga los datos de cada uno de los integrantes del equipo, añade las operaciones obtenidas para cada sistema, anexa las gráficas correspondientes y envía tu documento a la siguiente dirección: <a href="mailto:humbertozs@prodigy.net.mx">humbertozs@prodigy.net.mx</a></li></ol> <p>4. Atendiendo las indicaciones anteriores resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>a) <math>x + y^2 = 2</math>, <math>x + y = 2</math></li><li>b) <math>x^2 + y^2 = 1</math>, <math>x - y = 0</math></li></ol> <p>5. Tarea. Realiza el procedimiento seguido en el punto 3 y resuelve los siguientes ejercicios, al finalizarlos arma tu documento de Word para subirlos en la sección de Tareas de la plataforma Moodle.</p> <ol style="list-style-type: none"><li>a. <math>2x - y = -4</math>; <math>-x^2 + y = 4</math></li><li>b. <math>y = x^2</math>, <math>y = -x^2 + 4x</math></li><li>c. <math>x^2 - 4x + y = 8</math>, <math>x^2 - 2x - y = 0</math></li></ol>
<b>EVALUACIÓN</b>	<p>El trabajo se revisa en tres apartados:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>➤ El trabajo previo elaboración de las tabulaciones y gráficos de tarea se evalúa en la primera sesión. Valor 20 %.</li><li>➤ Los productos enviados después de la primera sesión. Los cuales serán devueltos a cada alumno a vuelta de correo electrónico con los comentarios que el profesor considere necesarios. Valor 40% de la calificación</li><li>➤ El trabajo realizado como tarea al finalizar la sesión y que será evaluado y devuelto al alumno a través de la plataforma con los comentarios que el profesor considere necesarios. Valor 60 %</li></ul>
<b>REFERENCIAS (FORMATO APA)</b>	<p>Caballero. A. (2000) <i>Geometría analítica</i>, México: Esfinge.</p> <p>Fillooy, E. (1997). <i>Geometría Analítica</i>. México: Iberoamérica.</p> <p>Fuenlabrada, S. <i>Geometría Analítica</i>. México: Mc Graw-Hill.</p>



Fuller, G. *Geometría Analítica*. México: Addison-Wesley.

Gomez, P. (2009). *Matemáticas 3 Sistemas de Ecuaciones y Geometría Analítica*. México: CCH-Oriente.



# UNIDAD 1

## SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

**PROPÓSITOS.** Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones y extender los procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica.

### INTRODUCCIÓN

En algunas ocasiones se tiene la necesidad de resolver simultáneamente varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones comunes a todas ellas, esto no necesariamente en Matemáticas sino también en otras materias. Esto también resulta útil en geometría debido a que las ecuaciones lineales se interpretan como rectas o planos, por lo que resolver un sistema equivale a estudiar la posición relativa de estas figuras geométricas en el plano o en el espacio. Recordemos algunas cuestiones relacionadas con las ecuaciones, para luego pasar a la interpretación geométrica.

La ecuación  $2x - 3 = 0$  se llama ecuación lineal con una incógnita. Sabemos que sólo tiene una solución, esto es, existe **un solo valor de x** que hace verdadera a la ecuación. En nuestro caso  $x = 3/2$  (ó también  $x = 1.5$ )

La ecuación  $-3x + 2y = 7$  se llama ecuación lineal con dos incógnitas. Sus soluciones son pares ordenados de números  $(x, y)$ . Tiene **infinitas soluciones** que se pueden obtener despejando una variable y dando valores cualesquiera a la otra. Por ejemplo, si despejamos a **y**, obtenemos  $y = 1.5x + 3.5$ , (corrobóralo) con lo cual podemos ver que **algunas** de las parejas que vuelven verdadera a la ecuación, o soluciones son:  $(2, 10)$ ,  $(5, 14.5)$ ,  $(-1, 5.5)$ , etc.

La ecuación  $x - 2y + 5z = 1$  se llama ecuación lineal con tres incógnitas. Sus soluciones son ternas ordenadas de números  $(x, y, z)$ . Tiene **infinitas soluciones** que se pueden obtener despejando una incógnita y dando valores cualesquiera a las otras dos. Algunas soluciones de la ecuación son:  $(-13, 3, 4)$ ,  $(1, -5, -2)$ ,  $(2, -2, -1)$ ,  $(1, 0, 0)$  etc.

En general, una **ecuación lineal con "n" incógnitas** es del tipo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

**Decimos que una ecuación algebraica lineal es aquella en donde en cada término de la ecuación aparece únicamente una variable o incógnita elevada a la primera potencia.**

Acuérdate que un **término** se define como toda expresión que consista de números, variables o el producto de números y variables; por ejemplo:  $8x$ ;  $5ab$ ;  $12$ ;  $a_{11}x_1$ ; etc.

En una ecuación algebraica lineal con **incógnitas**  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , los **coeficientes**  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$  y el **término independiente**  $c_1$ , son **constantes reales**.

Veamos una actividad para aclarar lo anterior:

## SECCIÓN 1. SITUACIONES QUE DAN LUGAR A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Mediante el estudio de esta sección pretendemos que aprendas a reconocer cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas,

A continuación, te presentamos dos ejemplos sencillos en donde se modelan situaciones que dan lugar a ecuaciones, en el primero una ecuación con tres incógnitas y en el segundo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

### ACTIVIDAD 1.

El costo de dos tortas, ocho refrescos y seis bolsas de papitas es de 64 pesos ¿cuánto cuesta una torta?

Si consideramos que:  $t$  = costo de una torta,  $r$  = costo de un refresco,  $p$  = costo de una bolsa de papitas, una ecuación que representa al problema es:

$$2t + 8r + 6p = 64$$

La ecuación anterior tiene la forma  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$ , en donde:  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ , son respectivamente: 2, 8 y 6; y las incógnitas  $x_1, x_2, x_3$ , respectivamente  $t, r, p$ ; y  $c_1 = 64$ . Por lo tanto, la ecuación planteada es una ecuación algebraica lineal. Como recordarás, es lineal debido a que el exponente de las incógnitas es uno, además de que no se encuentran multiplicadas unas con otras.

Una posible solución de la ecuación son los valores:  $t = 10$  pesos;  $r = 4$  pesos;  $p = 2$  pesos, ya que  $2(10) + 8(4) + 6(2) = 64$

Encuentra otras dos soluciones y comprueba que lo son:

$$t = \quad ; r = \quad ; p = \quad , \text{ ya que } 2(\quad) + 8(\quad) + 6(\quad) = 64$$

$$t = \quad ; r = \quad ; p = \quad , \text{ ya que } 2(\quad) + 8(\quad) + 6(\quad) = 64$$

Despeja a  $t$  en la ecuación y luego asigna los valores  $r = 2$ ,  $p = 3$  y calcula el valor de  $t$ . Escribe la nueva solución que encuentre: ( , , )

Calcula otros dos valores de  $t, r, p$ , que vuelvan verdadera a la ecuación.

$$\begin{pmatrix} \quad , \quad , \quad \\ \quad , \quad , \quad \end{pmatrix}$$

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $2t + 8r + 6p = 64$ ?

### ACTIVIDAD 2

Hemos recabado más información sobre el precio de las tortas, refrescos y bolsas de papitas. La información es la siguiente: el costo de dos tortas, ocho

refrescos y seis bolsas de papitas es de 64 pesos, además que una torta, cinco refrescos y cuatro bolsas de papitas cuestan 38 pesos, y, por otro lado, que tres tortas, tres refrescos y siete bolsas de papitas cuestan 56 pesos.

a) Escribe las ecuaciones que representan el problema.

b) Encuentra un sistema de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

c) Escribe los valores correspondientes de los coeficientes:

$$a_{11} = \quad , a_{12} = \quad , a_{13} =$$

$$a_{21} = \quad , a_{22} = \quad , a_{23} =$$

$$a_{31} = \quad , a_{32} = \quad , a_{33} =$$

Y los valores de los términos independientes:

$$c_1 = \quad , c_2 = \quad , c_3 =$$

d) ¿Por qué razón el sistema es lineal?

e) ¿De qué manera se comprueba si un conjunto de valores  $x_1 = t$ ,  $x_2 = r$  y  $x_3 = p$ , es una solución del sistema?

f) Comprueba que una solución del sistema es:  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 4$  y  $x_3 = 2$ , o lo que es lo mismo, (10, 4, 2).

g) ¿Habrá otros conjuntos de valores  $(x_1, x_2, x_3)$  que satisfagan las tres ecuaciones al mismo tiempo? **No es necesario que resuelvas el sistema**, más adelante lo haremos detenidamente, por el momento sólo intenta justificar tu respuesta aunque no estés seguro de ella.

Para discutir a fondo la solución de este problema recordemos algunos conceptos que viste en primer semestre.

### EJERCICIO 1

De los siguientes sistemas, determina cuáles son lineales:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x - \frac{5}{4}y = -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ x + 2y = 3^2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2xy = 4 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x - y + 4z = 2 \\ x^2 - 2y + z = 5 \\ x + y + z = 15 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - 9y + 4z = 2^{1/2} \\ 2x + 4y + 3z = -11 \\ 5x - 3y + 7z = 0 \end{cases} \quad f) \begin{cases} xyz = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad g) \begin{cases} \sqrt{2}x - y + z + w = 7 \\ x + \frac{3}{5}y + 9z - 2w = 3 \\ 11x - 7y + 5z + 4w = -1 \\ -2x + 6y + 3z + 8w = 0 \end{cases}$$

## SECCIÓN 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y 3X3:

- a) Con solución única.
- b) Con infinitud de soluciones.
- c) Sin soluciones.

En esta sección trabajaremos para que recuerdes el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprendas la forma en que se extiende a un sistema 3x3.

### SISTEMA DE ECUACIONES

El tema sistema de ecuaciones lineales fue abordado en tu curso de primer semestre, ahora trataremos de profundizar en él y avanzar hacia sistemas de ecuaciones más complicados, con mayor número de ecuaciones y con ecuaciones no lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente, es decir, conjuntos de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

Un sistema así expresado tiene  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas, donde  $a_{ij}$  son números reales, llamados **coeficientes del sistema** (los subíndices  $ij$  representan el número de fila y el número de columna respectivamente); los valores  $c_n$  son números reales, llamados **términos independientes** del sistema; las incógnitas  $x_j$  son las **variables** del sistema, y la **solución del sistema** es un conjunto ordenado de números reales  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  tales que al sustituir las incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  por los valores  $s_1, s_2, \dots, s_n$  las  $n$  ecuaciones del sistema se convierten en verdaderas. Al conjunto  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  se le conoce también como **conjunto solución**.

Un caso particular ocurre cuando tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual siempre se podrá escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

Recordemos la idea básica de dos de los cuatro métodos que ya conocemos para resolver este tipo de sistemas:

- **Método gráfico.** Se grafican las dos ecuaciones y se determina el punto de intersección, si es que existe, el cual representará la solución del sistema.
- **Método de reducción (eliminación).** Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números convenientes) para que al sumarlas o restarlas, se cancele una de las incógnitas, quedando una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual se resuelve encontrando el valor de una de las incógnitas. Se hace el proceso equivalente para determinar la otra incógnita.

- **Método de sustitución.** De una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas y se la sustituye en la otra ecuación, resultando una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual se resuelve, encontrando el valor para una de las incógnitas, para luego encontrar la otra incógnita.

Veamos un ejemplo en el cual apliquemos método gráfico y dos métodos algebraicos, en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

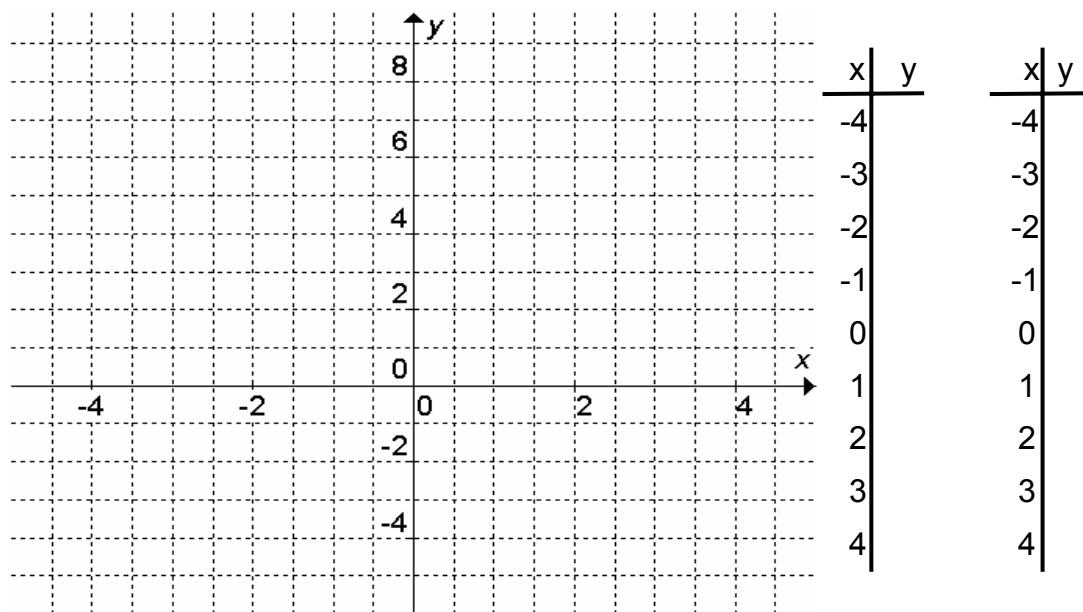
### ACTIVIDAD 3

Considera el sistema  $\begin{cases} 2x + y = 3 \dots\dots\dots(1) \\ 5x + 3y = 10 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

Primero vamos a resolverlo por el método gráfico, para hacerlo, tabula y traza las gráficas correspondientes y encuentra la solución. Te sugerimos, despejar de cada ecuación la incógnita **y** antes de graficarla.

De la ecuación (1) obtienes que  $y = 3 - 2x$

Para la ecuación (2) obtienes que  $y =$



Ahora, pasemos a resolverlo por el **método de reducción**. Para eliminar la incógnita **x**, multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por -2, obteniendo:

$$\begin{aligned} 5(2x + y = 3) &\rightarrow 10x + 5y = 15 \dots\dots\dots(3) \\ -2(5x + 3y = 10) &\rightarrow \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

Al sumar las ecuaciones resultantes, (3) y (4), obtendrás el valor de **y**:  
 $y =$

De manera similar, para eliminar la incógnita **y**, la ecuación (1) se puede multiplicar por el número: \_\_\_\_\_ y la (2) por el número: \_\_\_\_\_. Haciendo lo anterior, obtienes las ecuaciones (3) y (4). Escríbelas.

(3)  
(4)

Al sumarlas, o restarlas, según convenga, eliminas la incógnita **y**. Luego al resolver la ecuación resultante, llegaste a que:  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

Recordemos el **método de sustitución**, de la ecuación (1) despejamos “y” obteniéndose:  $y = 3 - 2x \dots\dots(3)$

Sustituimos la ecuación (3) en la ecuación (2) y al resolver, obtienes **x**:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 10 \\ 5x + 3(3 - 2x) &= 10 \\ x &= \end{aligned}$$

Ahora al sustituir, el valor encontrado de x en (3), obtienes **y**:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ y &= \end{aligned}$$

Has determinado la solución del sistema por dos métodos algebraicos, la cual puedes representar como la pareja ordenada: ( , ). Te recomendamos que siempre que encuentres la solución de un sistema la compruebes en el sistema respectivo original.

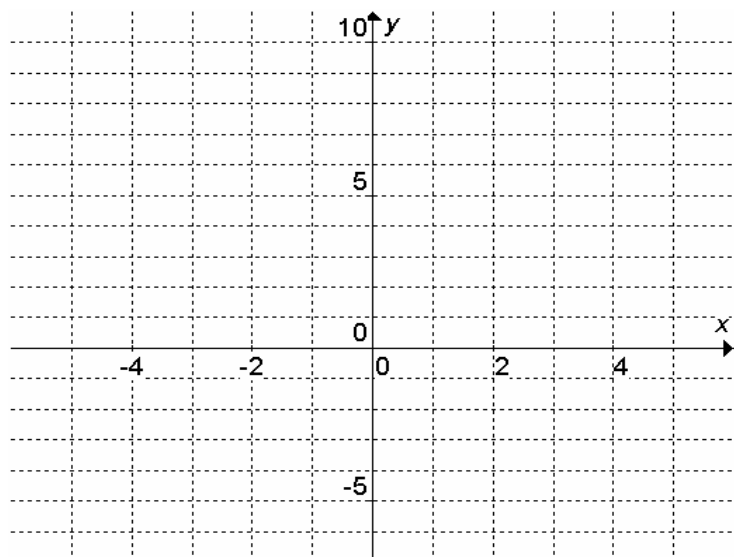
**ACTIVIDAD 4**

Considera el siguiente sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \dots\dots(1) \\ 6x + 4y = 8 \dots\dots(2) \end{cases}$

Grafica el sistema y encuentra la solución. Para lo cual despeja la incógnita **y** de cada una de las ecuaciones, haces la tabulación, graficas y determinas el punto solución del sistema:

De (1)  $y =$

De (2)  $y =$



x	y	x	y
-4		-4	
-3		-3	
-2		-2	
-1		-1	
0		0	
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	

Escribe el resultado que encontraste: \_\_\_\_\_

Pasemos al método algebraico; primeramente usando el **método de reducción**, para eliminar la incógnita **x**, la ecuación (1) la multiplicamos por: \_\_\_\_\_ y le sumamos la segunda, con lo cual obtenemos:

$$\begin{array}{r} \underline{\hspace{2cm}}(3x + 2y = 4) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \dots\dots(3) \\ \hspace{1.5cm} 6x + 4y = 8 \dots\dots(2) \end{array}$$

obteniéndose: **0 = 0**

Desde la tabulación te diste cuenta que las dos ecuaciones no son independientes, sino que son totalmente dependientes, es decir, a partir de una se obtiene la otra.

El resultado obtenido, verifica lo que encontraste por el método gráfico. Gráficamente una recta queda sobre la otra, o bien, ambas gráficas no son distintas, por lo que todas las soluciones de una de ellas serán las soluciones de la otra y por lo tanto del sistema. Así pues, bastará con despejar la incógnita **y** de una de las ecuaciones, por ejemplo de la (1), obteniendo  $y = (4 - 3x)/2$ , para luego asignarle valores a **x** y obtener los de **y**.

Claro que lo anterior significa que el sistema tiene infinidad de soluciones, algunas de las cuales son: (0, 2), (4/3,0), (1, 1/2), (2/3, 1). Compruébalas y obtén otras cuatro.

Si se resuelve por el método de sustitución, de la ecuación (1) se tiene que:

$$y = \frac{4 - 3x}{2} \dots\dots(3)$$

Al sustituir (3) en (2) se llega a que:  $6x + 4\left(\frac{4 - 3x}{2}\right) = 8$ , de donde:

$$\begin{aligned} 12x + 4(4 - 3x) &= 16 \\ 12x + 16 - 12x &= 16 \\ \mathbf{16} &= \mathbf{16} \end{aligned}$$

Llegamos a una situación equivalente a la que encontramos cuando se trabajó el método de reducción.

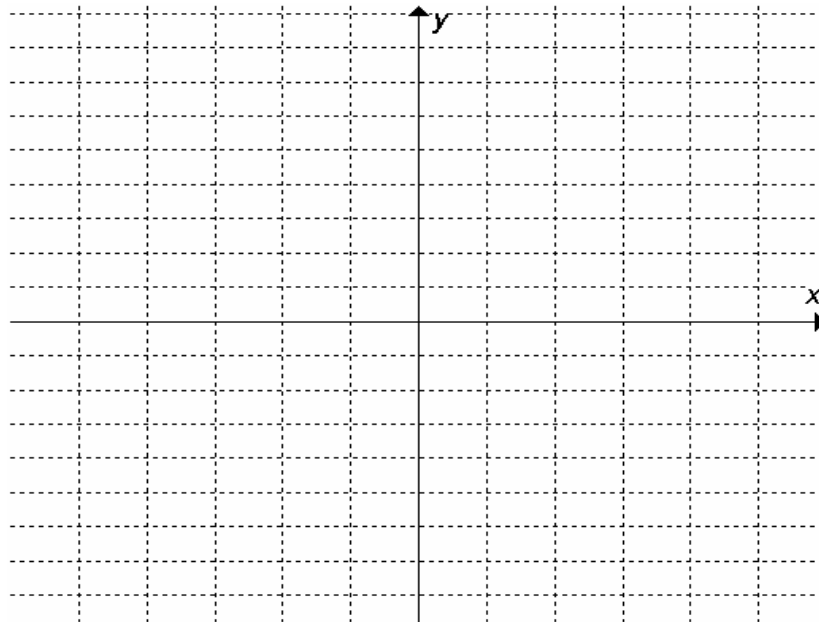
**ACTIVIDAD 5**

Considera el sistema  $\begin{cases} 6x - 3y = 5 \dots\dots (1) \\ 2x - y = 4 \dots\dots (2) \end{cases}$

Nuevamente, inicia resolviendo el sistema por el método gráfico, para lo cual, despeja la incógnita **y** de cada ecuación, tabula, traza las gráficas y determina la solución.

De la ecuación (1)  $y =$  \_\_\_\_\_ De la ecuación (2)  $y =$  \_\_\_\_\_

Tabula y grafica.



Escribe el resultado que encontraste: \_\_\_\_\_

Por el **método de reducción**, para eliminar la incógnita **x**, a la ecuación (2) la multiplicamos por      y le sumamos la ecuación (1), quedándonos como resultado:

$$\begin{array}{r} 6x - 3y = 5 \\ -3(2x - y = 4) \\ \hline 0 = -7 \end{array}$$

Podemos afirmar que el sistema, formado por las dos ecuaciones, no es compatible, o es inconsistente, debido a que al tratar de resolverlas conjuntamente nos lleva a un absurdo.

Por el **método de sustitución**, primero despejamos de la ecuación (2) la incógnita **y**, obteniendo la ecuación (3), luego la sustituimos en la ecuación (1), y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{array}{r} y = 2x - 4 \dots\dots\dots(3) \\ 6x - 3(2x - 4) = 5 \\ 6x - 6x + 12 = 5 \\ \hline 12 = 5 \end{array}$$

Hemos comprobado, tanto de manera gráfica como por el método de reducción y el de sustitución que el sistema no tiene solución.

Con las tres últimas actividades se aprecian los **tres casos posibles cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, o sistema 2x2:**

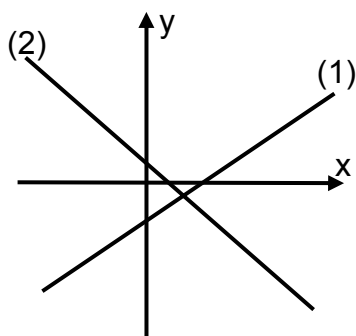
I. **El sistema tiene solución única.** Las ecuaciones son consistentes o compatibles y linealmente independientes. Su representación gráfica queda representada por dos rectas que se intersecan y su solución es el punto de intersección.



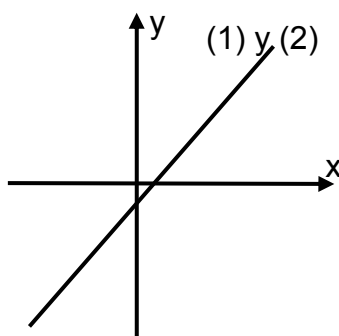
II. **El sistema tiene infinidad de soluciones.** En este caso, también las ecuaciones son consistentes o compatibles, pero son linealmente dependientes. En su representación gráfica una recta queda sobre la otra, por lo que su solución está representada por todos los puntos de la recta.

III. **El sistema no tiene solución.** Las ecuaciones son inconsistentes o incompatibles. Su representación gráfica muestra dos rectas paralelas, por lo que no tiene solución el sistema.

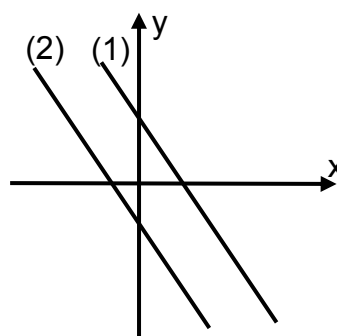
Gráficamente tenemos:



**Caso I**



**Caso II**



**Caso III**

Cuando dos ecuaciones lineales con dos variables son consistentes e independientes (Caso I), la solución que se obtiene gráficamente puede ser solo una aproximación, pues la lectura de los números en la gráfica normalmente tiene imprecisiones de medición. **Para obtener las soluciones exactas e sistemas de ecuaciones lineales, hay que usar métodos algebraicos.** Algunos de estos métodos ya los conoces desde primer semestre.

¿Qué haremos si en lugar de tener un sistema 2x2 tenemos uno 3x3?, por ejemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \dots\dots(1) \\ 2x + y - 4z = 3 \dots\dots(2) \\ -3x + 4y - z = -2 \dots\dots(3) \end{cases}$$

Podemos seguir las mismas ideas del método de eliminación. Se prepararán las tres ecuaciones (multiplicando por los números convenientes) para que al sumarlas o restarlas, se cancele una de las incógnitas, quedando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al cual le aplicamos el mismo método, como ya lo hemos hecho, y lo resolvemos. Luego regresamos a cualquiera de las tres ecuaciones originales y sustituimos los valores de las incógnitas encontradas para determinar el valor de la tercera incógnita.

La ecuación (1) la multiplicamos por -2 y la sumamos con la ecuación (2):

$$\left. \begin{array}{l} -2(x - 2y + 3z = 4) \rightarrow -2x + 4y - 6z = -8 \\ 2x + y - 4z = 3 \rightarrow 2x + y - 4z = 3 \end{array} \right\} 5y - 10z = -5 \dots\dots(4)$$

La ecuación (1) la multiplicamos por 3 y le sumamos la ecuación (3):

$$\left. \begin{array}{l} 3(x - 2y + 3z = 4) \rightarrow 3x - 6y + 9z = 12 \\ -3x + 4y - z = -2 \rightarrow -3x + 4y - z = -2 \end{array} \right\} -2y + 8z = 10 \dots\dots(5)$$

La ecuación (4) la multiplicamos por 2, a la (5) por 5 y las sumamos:

$$\left. \begin{array}{l} 2(5y - 10z = -5) \rightarrow 10y - 20z = -10 \\ 5(-2y + 8z = 10) \rightarrow -10y + 40z = 50 \end{array} \right\} 20z = 40 \dots\dots(6)$$

En la ecuación (6) se determina  $z = \underline{\hspace{2cm}}$ , se sustituye en (5) y se determina que  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ . Por último, estos dos valores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3) y se determina que  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ . De manera que la solución del sistema es  $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$ .

¿Será única la solución?  $\underline{\hspace{2cm}}$  Con respecto al número de soluciones, ¿éste sistema se denomina?  $\underline{\hspace{4cm}}$

## EJERCICIO 2

Traza la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones y clasifícalos como: I) Consistentes y linealmente independientes; II) Consistentes y linealmente dependientes; III) Inconsistentes. Si el sistema es consistente y linealmente independiente, determina su solución, tanto por el método gráfico como por el de eliminación o sustitución.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & 2) \begin{cases} y = 8 + 2x \\ 6x + 3y = 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 8x = 6y + 9 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 9x - 3y = 7 \\ y = 3x - \frac{5}{2} \end{cases} & 5) \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y - 12 = 0 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases} \\ 7) \begin{cases} 4x - 2y - 7 = 0 \\ x = \frac{1}{2}y + 5 \end{cases} & 8) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + 5y = 2 \end{cases} & 9) \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases} \end{array}$$

## SECCIÓN 3. SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES

a) Concepto.

b) Forma triangular.

En esta sección, trabajaremos para que reafirmes el concepto de sistemas equivalentes y entiendas que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones, se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirmarás la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.

### SISTEMAS DE ECUACIONES 3x3

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siempre se puede

escribir de la forma: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Tomemos como ejemplo al problema que resolvimos al final de la sección

anterior: 
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \dots\dots(1) \\ 2x + y - 4z = 3 \dots\dots(2) \\ -3x + 4y - z = -2 \dots\dots(3) \end{cases}$$

El proceso de solución que vimos al final de la sección anterior lo podemos resumir como sigue: utilizando el hecho de que **dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones**. Así, el sistema original lo iremos transformando a sistemas equivalentes para determinar su solución:

Partimos del sistema original el cual transformamos a dos sistemas equivalentes:

Sistema original	Sistema equivalente	Sistema equivalente
$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \dots(1) \\ 2x + y - 4z = 3 \dots(2) \\ -3x + 4y - z = -2 \dots(3) \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \dots(1) \\ 5y - 10z = -5 \dots(4) \\ -2y + 8z = 10 \dots(5) \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \dots(1) \\ 5y - 10z = -5 \dots(4) \\ 20z = 40 \dots(6) \end{cases}$

El último sistema equivalente está en **forma triangular**, como bien puedes observar. Habiendo llegado a él, se puede resolver la ecuación (6) y encontrar **z**, luego sustituir la solución en la (4) y encontrar **y**, para finalmente sustituir en la (1) y encontrar **x**.

### ACTIVIDAD 6

Siguiendo las mismas ideas pasemos a resolver el problema de las tortas, refrescos y bolsas de papas:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \dots\dots(1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \dots\dots(2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \dots\dots(3) \end{cases}$$

La ecuación (2) la multiplicas por      y se la sumas a la ecuación (1), con lo cual eliminarás la incógnita  $x_1$  y obtendrás la ecuación (4). A continuación multiplicas la ecuación (2) por      y se la sumas a la ecuación (3), para eliminar también la incógnita  $x_1$  y obtener la ecuación (5). Completa lo que haga falta:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \dots(1) \\ \underline{\quad}(1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \dots(1) \\ \underline{\quad}(1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38) \end{array}} \right\} \underline{\quad}x_2 + \underline{\quad}x_3 = \underline{\quad} \dots(4)$$

$$\begin{array}{l} \underline{\quad}(1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \dots(3) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \underline{\quad}(1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \dots(3) \end{array}} \right\} \underline{\quad}x_2 + \underline{\quad}x_3 = \underline{\quad} \dots(5)$$

Si a la ecuación (4) la multiplicas por      y le sumas la ecuación (5), obtendrás:

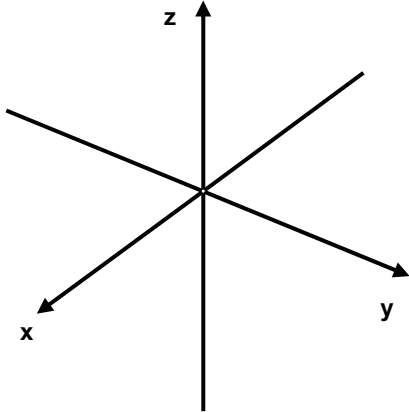
$$7x_3 = 14 \dots(6)$$

Escribe el sistema equivalente en su **forma triangular** y determina el costo de cada artículo.

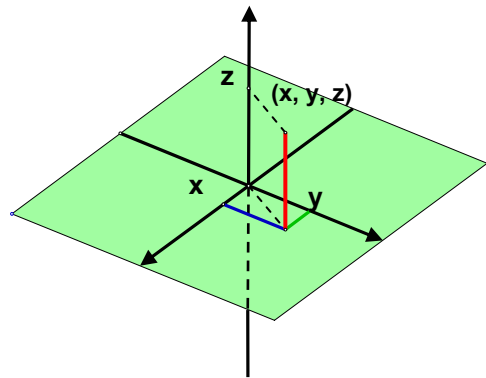
### UBICACIÓN ESPACIAL DE UN SISTEMA 3x3

Como hemos visto, los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 se expresan gráficamente como **rectas** que pueden estar en tres casos. De igual manera las ecuaciones lineales de tres incógnitas se expresan en un sistema tridimensional como un plano infinito no curvado. Por supuesto que no podemos dibujar un plano infinito, por lo que **sólo dibujaremos una parte de los planos**.

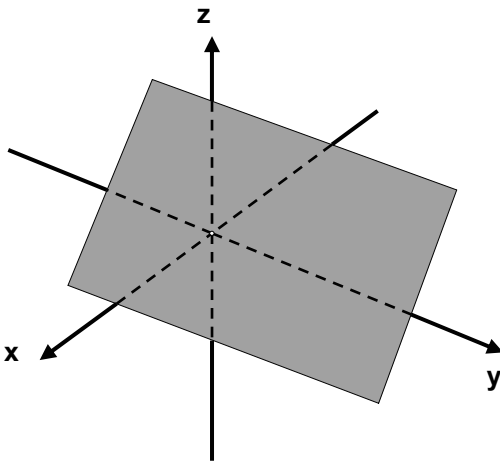
Una ecuación lineal de tres incógnitas representa un plano que puede ser ubicado en un sistema de tres dimensiones con **ejes ortogonales** (ejes que están mutuamente a  $90^\circ$ ):



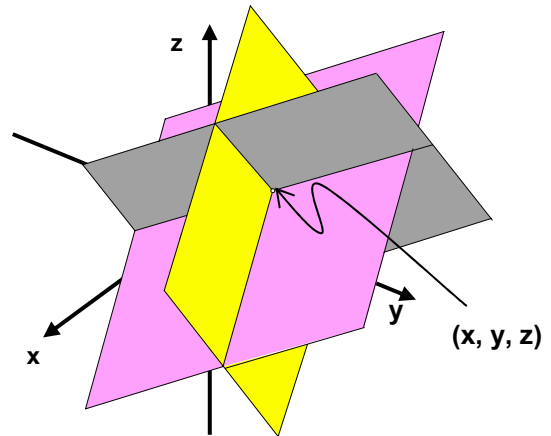
**Ejes en tres dimensiones.**



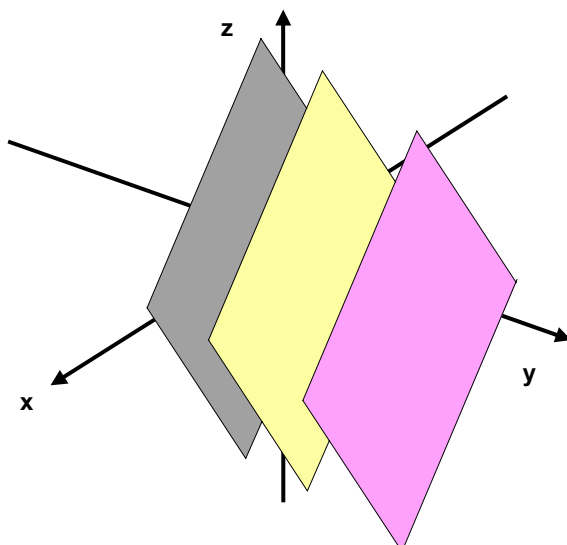
**Ubicación de un punto en el espacio; coordenadas (x, y, z).**



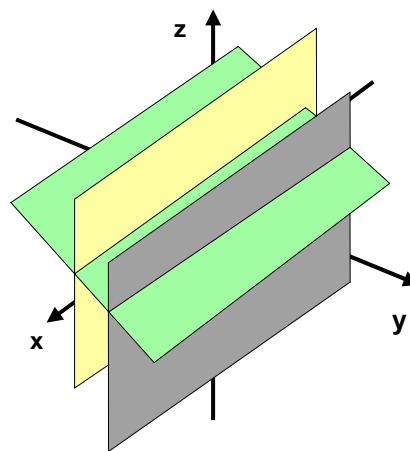
**Ubicación de una ecuación lineal 3x3.**



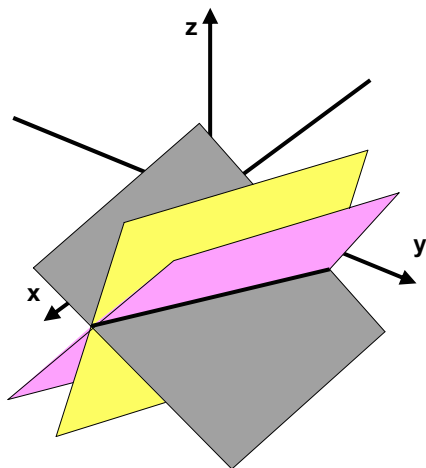
**Sistema 3x3 con solución única en el punto (x, y, z).**



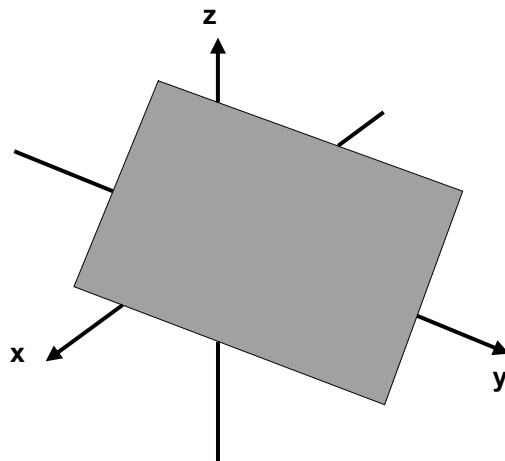
**Sistema 3x3 con planos paralelos. Sin solución.**



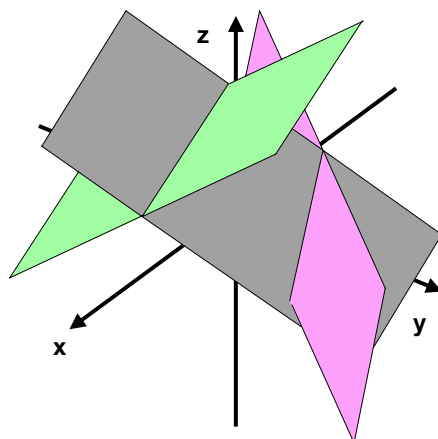
**Sistema 3x3 con dos planos paralelos. Sin solución.**



**Sistema 3x3 con planos coincidiendo en una línea. Infinidad de soluciones (puntos en común en la recta).**



**Sistema 3x3 con tres ecuaciones que representan al mismo plano. Infinidad de soluciones (infinitud de puntos en común en el plano).**



**Sistema 3x3 con tres planos que coinciden en pares, pero no tienen los tres simultáneamente una línea o un punto en común. Sin solución.**

Así pues, **pueden suceder tres casos** cuando resolvemos sistemas 3x3: que el sistema no tenga solución, que tenga infinitud de soluciones o tenga solución única. Es claro que estos tres casos se refieren a todos los sistemas de ecuaciones lineales, no sólo a los 2x2 o 3x3.

#### **SECCIÓN 4. MÉTODOS DE REDUCCIÓN Y DE SUSTITUCIÓN**

En esta sección, aprenderás a:

- Distinguir cuando un sistema de ecuaciones 3x3 o 4x4, está escrito en forma triangular y explicar qué ventajas aporta esta forma para resolverlo.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales 3x3, utilizar el método de suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtener su solución.
- A través de la última ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identificar si éste es compatible o no, o bien, si es dependiente o no.

Ya hemos visto el **método de sustitución** para resolver un sistema 3x3.

Ahora veamos el **método de reducción** (también conocido como “suma y resta), que es similar al que aplicaste en los sistemas 2x2. Partamos del sistema que ya hemos visto:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \dots (1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \dots (2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 \dots (3) \end{cases}$$

### ACTIVIDAD 7

Toma en cuenta las dos primeras ecuaciones:  $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \dots (1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 \dots (2) \end{cases}$

Como recordarás el **método de reducción** consiste en eliminar alguna de las incógnitas, igualando sus coeficientes pero con signo contrario para que al sumar ecuación con ecuación resulte el coeficiente cero de tal incógnita y así se elimine.

Multiplica la segunda ecuación por -2 y réstala de la primera. Escribe el procedimiento y el resultado:

La ecuación que te debió resultar es:  $-2x_2 - 2x_3 = -12 \dots (4)$

Tratemos ahora con el mismo procedimiento a las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{aligned} 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 38 \dots (2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 56 \dots (3) \end{aligned}$$

Multiplica la ecuación (2) por -3 y súmala con la (3). Escribe el procedimiento y el resultado:

La ecuación que te debió resultar es:  $-12x_2 - 5x_3 = -58 \dots (5)$

Con las ecuaciones (4) y (5), obtenemos al sistema de ecuaciones **2x2**:

$\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = -12 \dots (4) \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 \dots (5) \end{cases}$ , al cual le aplicamos nuevamente el método y encontramos los valores de  $x_2$  y  $x_3$ .

Resuelve el sistema anterior y escribe tus resultados. Termina de resolver el sistema 3x3 que se planteó al principio de esta actividad. Compara tu solución con la que obtuvimos cuando solucionamos este mismo problema por el método de sustitución.

Haz un resumen explicando el método de reducción para un sistema 3x3.

### ACTIVIDAD 8

Dado el siguiente sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x - y - 4z = 3 \dots\dots(1) \\ 2x - 3y + 2z = 0 \dots\dots(2) \\ 2x - y + 2z = 2 \dots\dots(3) \end{cases}$

Despeja a **x** de la ecuación (1)  $\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \dots\dots(1) \\ 2x - 3y + 2z = 0 \dots\dots(2) \\ 2x - y + 2z = 2 \dots\dots(3) \end{cases}$

Sustituye el valor de **x** de la ecuación (1) en las otras dos para obtener el sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} \\ 2(\underline{\hspace{2cm}}) - 3y + 2z = 0 \\ 2(\underline{\hspace{2cm}}) - y + 2z = 2 \end{array} \right. , \text{ simplifica donde sea posible: } \left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Despeja a **y** de la segunda ecuación:  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ y + 10z = -4 \end{array} \right.$

Sustituye el valor de **y** de la segunda ecuación, en la tercera se obtiene el sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \\ (\underline{\hspace{2cm}}) + 10z = -4 \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de **z** obtenido de la tercera ecuación en la segunda, se encuentra el valor de **y**.

Sustituyendo los valores de **y** y **z** de la segunda y tercera ecuaciones en la primera obtenemos el valor de **x**.

El conjunto de soluciones del sistema es: ( , , )

Comprueba las soluciones sustituyendo estos valores en cada una de las ecuaciones originales.

### FORMA TRIANGULAR

De hecho, los métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales consisten en transformar al sistema dado a una **forma triangular**.

Veamos primero qué es una forma triangular.

Un sistema es “**triangular**” si:

- 1) Una de las ecuaciones del sistema nos da directamente el valor de una de las incógnitas.
- 2) Después de sustituir este valor en una segunda ecuación, se determina el valor de una segunda incógnita.
- 3) Después de sustituir estos dos valores en una tercera ecuación, se determina una tercera incógnita.

**Ejemplo** forma triangular:

$$\begin{array}{l} 3x = 12 \qquad (1) \\ 2x + y = 13 \qquad (2) \\ 3x - 2y + 4z = 14 \qquad (3) \end{array}$$

La primera ecuación nos da “directamente” el valor de **x = 4**.

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación obtenemos el valor de una segunda incógnita:  $2(4) + y = 13 \rightarrow 8 + y = 13 \rightarrow y = 5$ .

Al sustituir los dos valores anteriores en una tercera ecuación se determina la tercera incógnita:  $3(4) - 2(5) + 4z = 14 \rightarrow 2 + 4z = 14 \rightarrow 4z = 12 \rightarrow z = 3$ .

Si analizamos la solución al sistema de ecuaciones en la **Actividad 6** tenemos que transformamos al sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 & \dots (1) \\ 1x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 38 & \dots (2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 56 & \dots (3) \end{cases}$$

Obteniendo primero al sistema  $\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = -12 & \dots (4) \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 & \dots (5) \end{cases}$ , el cual al resolverlo nos da como resultado, si eliminamos a  $x_2$ , (aplicando el método de reducción multiplicando la ecuación (4) por -6):

$$\begin{array}{r} 12x_2 + 12x_3 = 78 \\ -12x_2 - 5x_3 = -58 \end{array}$$

---

$0x_2 + 7x_3 = 14$ ; la que al simplificarla queda:  $7x_3 = 14$ , de donde  $x_3 = 2$

Así, podemos tener la forma triangular, con la ecuación  $7x_3 = 14$ , escogiendo después cualquiera de las ecuaciones (4) o (5) y cualquiera de (1), (2), (3), por ejemplo:

$$\begin{array}{l} 7x_3 = 14 \\ -2x_2 - 2x_3 = -12 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \end{array}$$

De la primera ecuación de este sistema:  $x_3 = 2$  (como ya vimos)

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación:  $-2x_2 - 2(2) = -12$ ; entonces  $x_2 = 4$ .

Sustituyendo estos dos valores en la tercera ecuación:  $2x_1 + 8(4) + 6(2) = 64$ , por lo tanto,  $2x_1 = 20$ ; entonces  $x_1 = 10$

Es claro que también podríamos tener la forma triangular:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 64 \\ -2x_2 - 2x_3 = -12 \\ 7x_3 = 14 \end{array}$$

Y la solución del sistema sería la misma.

El transformar a un sistema de ecuaciones a una forma triangular se le conoce como **método de Gauss**, o también **método de cascada**.



### EJERCICIO 3

Establece una forma triangular equivalente al siguiente sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$$

### SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES 3x3

Como ya lo dijimos anteriormente, en los sistemas lineales ocurren cualquiera de tres casos: **I.** Sistemas con una solución; **II.** Sistemas con infinitud de soluciones; **III.** Sistemas sin solución. Hasta este momento hemos visto sistemas 3x3 con **una solución**, esto es, un punto  $(s_1, s_2, s_3)$ . Veamos ahora los otros dos casos.

### ECUACIONES 3x 3 CON INFINIDAD DE SOLUCIONES

Podemos tener un sistema 3x3 **que tenga infinitud de soluciones**, esto es:

1. Que el sistema se represente gráficamente en tres planos con **una recta común a los tres planos**, en cuyo caso la solución para el sistema serían todos los puntos de la recta (infinitud de puntos y por tanto **infinitud de soluciones**).
2. O bien un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación represente **al mismo plano**, por lo cual las soluciones del sistema serían todos los puntos de tal plano (todos los puntos de ese plano hacen verdaderas a las tres ecuaciones). Por lo tanto, el sistema tendrá **infinitud de soluciones**.

En cualquiera de los dos incisos anteriores tendremos infinitud de soluciones. Veamos una actividad.

### ACTIVIDAD 9

Tomemos al siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y + 2z = -3 \quad (1) \\ 2x - 4y + 6z = 2 \quad (2) \\ x - 3y + z = 4 \quad (3) \end{array} \right\} \text{ También se podría simbolizar: } \left\{ \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{array} \right.$$

Usemos la primera simbolización y apliquémosle un método de solución que ya vimos:

Despeja a **y** de la primera ecuación: \_\_\_\_\_

Sustituye el valor de **y** en la segunda y tercera ecuación, con lo que tendrás un sistema **2x2** con las incógnitas **x, z**. Simplifica las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right., \text{ simplificación: } \left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

¿Qué puedes decir de la solución del sistema anterior?

Tal vez te diste cuenta que las dos últimas ecuaciones que encontraste representan **al mismo plano**:  $x + 0y + 7z = -5$ , por lo cual este sistema 2x2 tendrá **infinitud de soluciones**, lo cual ocasiona que el sistema 3x3 tenga, a su vez, infinitud de soluciones.

Si queremos obtener **algunas de tales soluciones** podemos despejar **x** de la última ecuación que obtuvimos:  $x = -7z - 5$ ; sabemos además que:  $y = -3 - 2z$ . Por lo anterior, si damos un valor arbitrario (el que queramos) a **z**, por ejemplo 5, tendremos:

$$z = 5$$

$$y = -3 - 2(5), \text{ entonces: } y = -13$$

$$x = -7(5) - 5, \text{ entonces: } x = -40$$

De donde, **una** solución al sistema original 3x3 es; (-40, -13, 5). Comprueba lo anterior en el sistema 3x3 original.

Encuentra al menos cuatro triadas más que solucionen al sistema y comprueba tus resultados.

En general, si queremos generalizar la solución del sistema original planteado, podemos decir que **su solución** es:

$$\left. \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ x = -7\lambda - 5 \end{array} \right\}$$

En donde  $\lambda$  es un número real cualquiera.

Otra forma de simbolizar la infinidad de soluciones es:  $(-7\lambda - 5, -3 - 2\lambda, \lambda)$

Analiza esta actividad y contesta: ¿en qué circunstancias un sistema 3x3 tiene infinidad de soluciones? ¿Cómo puedes encontrar algunas de esas soluciones?

### ECUACIONES 3x3 SIN SOLUCIÓN

Además de tener sistemas 3x3 con una solución o bien, con infinidad de soluciones (como te debes de acordar estos dos casos se llaman **sistemas compatibles o consistentes**), podemos tener sistemas 3x3 **sin solución** (que llamamos **incompatibles o inconsistentes**). Veamos al respecto la siguiente actividad.

#### ACTIVIDAD 10

Tomemos al siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 6z = 18 \quad (1) \\ 4x + 5y + 6z = 24 \quad (2) \\ 2x + 7y + 12z = 40 \quad (3) \end{array} \right\} \text{ También se podría simbolizar: } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{array} \right.$$

Usemos la primera simbolización y apliquémosle un método de solución que ya vimos:

Despeja a **y** de la primera ecuación: \_\_\_\_\_

Sustituye el valor de **y** en la segunda y tercera ecuación, con lo que tendrás un sistema **2x2** con las incógnitas **x, z**. Simplifica las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right., \text{ simplificación: } \left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Resuelve el sistema último que obtuviste (tal vez el método más conveniente sea el de reducción).

¿Qué puedes decir de la solución del sistema anterior?

Al resolver el sistema 2x2, te debió quedar un resultado como  $0 = 4$ , ¡lo cual es un resultado que en ningún caso es cierto! Como te acordarás, en casos como estos la conclusión es que el sistema no tiene solución, lo cual nos lleva a decir que **el sistema 3x3 no tiene solución**.

Analiza esta actividad y contesta: ¿en qué circunstancias un sistema 3x3 no tiene solución?

### SECCIÓN 5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES 2X2:

- a) Con una ecuación lineal y otra cuadrática.
- b) Con ambas ecuaciones cuadráticas.
- c) El significado gráfico de su solución.
- d) Método de sustitución.

Al finalizar esta sección:

- En el caso de sistemas 2x2, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explicarás a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinitud de soluciones.
- Para sistemas de ecuaciones 2x2 con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), trazarás un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las gráficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.

Existen **sistemas de ecuaciones que no son lineales**; basta con que una ecuación del sistema sea no lineal, esto es, basta con que una ecuación **no tenga la forma**  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$

Para analizar un sistema no lineal veamos la siguiente actividad.

#### ACTIVIDAD 11

Establece un **sistema de ecuaciones** que represente al siguiente problema: "Un alambre de 72 cm de largo es doblado para formar un triángulo rectángulo. Sabemos que la hipotenusa del triángulo mide 32 cm. Encuentra la medida de cada cateto. Considera que el alambre es sumamente delgado". **No es necesario que resuelvas el sistema de ecuaciones**.

El sistema que obtuviste es un **sistema no lineal**; veamos algunas ideas para resolverlo.

Por ejemplo, un **sistema no lineal** es: 
$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + y = 12 \dots(1) \\ 6x + 3y = 9 \dots(2) \end{cases}$$

En donde la primera ecuación no es lineal y la segunda si lo es.

Utilicemos el **método de igualación** para resolver este sistema:

Despejemos **y** en la primera ecuación:  $y = -2x^2 - 4x + 12$   
 Despejando **y** en la segunda ecuación, tenemos:  $y = -2x + 3$  } **Sistema equivalente al original**

Igualando el valor de **y**:  $-2x + 3 = -2x^2 - 4x + 12$ ; como es una ecuación de segundo grado es conveniente convertirla a la **forma  $ax^2 + bx + c = 0$**  para

poder aplicar a la fórmula:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ; así pues igualemos la ecuación a cero:  $-2x + 3 + 2x^2 + 4x - 12 = 0$ , simplificando:  $2x^2 + 2x - 9 = 0$ . Aplicando la

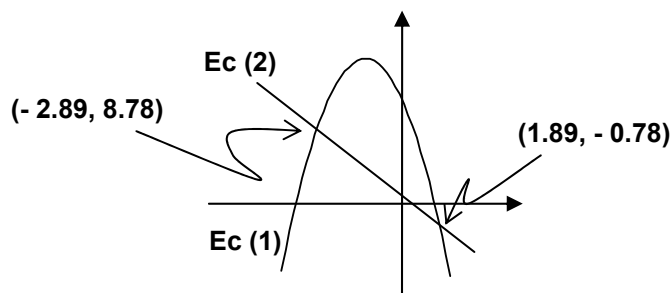
fórmula:  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-9)}}{2(2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{4} \approx \frac{-2 \pm 8.72}{4}$ , de

donde obtenemos los valores:  $x_1 = 1.89$ ;  $x_2 = -2.89$ , con los cuales sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema equivalente obtenemos:  $y_1 = -0.78$ ;  $y_2 = 8.78$ . Así pues, la solución del sistema son los valores **(1.89, -0.78)**, **(-2.89, 8.78)**

Veamos ahora cuál es la **representación gráfica** del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 + 4x + y = 12 \quad \dots(1) \\ 6x + 3y = 9 \quad \dots(2) \end{array} \right\} \text{ Sistema equivalente: } \begin{cases} y = -2x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

La primera ecuación representa, según te enseñaron en el curso de segundo semestre, a una parábola abierta hacia abajo; la segunda es una recta:



Los puntos de intersección son la solución del sistema, esto es: los valores:  $x_1 = 1.89$ ,  $y_1 = -0.78$ ;  $x_2 = -2.89$ ,  $y_2 = 8.78$ , vuelven verdaderas a ambas ecuaciones.

Si entendiste el ejemplo anterior resuelve el siguiente ejercicio:

#### EJERCICIO 4

Determina la solución del sistema  $\begin{cases} x - y = -4 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$

#### ACTIVIDAD 12

1. Grafica a las ecuaciones  $y = x^2$  y  $y = -2x^2 + 3$
2. Establece en la gráfica, aproximadamente, cuáles son los puntos en donde se intersectan las gráficas de ambas ecuaciones.
3. Resuelve el sistema de ecuaciones por algún método algebraico.
4. Compara los resultados gráficos con los algebraicos y escribe tus conclusiones.

### EJERCICIO 5

Establece un sistema de ecuaciones lineales 3x3 que no tenga solución.

### EJERCICIO 6

Establece un sistema de ecuaciones lineales 3x3 que tenga infinitud de soluciones.

## SECCIÓN 6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

En secciones anteriores se han mostrado ejemplos en los que se aplican sistemas de ecuaciones para resolver problemas. En esta sección, te proponemos dos actividades para que te ejercites en la aplicación de sistemas de ecuaciones.

### ACTIVIDAD 13

Una fábrica produce tres tipos de camisas. Cada uno de los tres tipos de camisa tiene que pasar por tres departamentos de producción: corte, cosido y empaque. Según el tipo de camisa, el tiempo de trabajo que se ocupa en cada una está dado en la siguiente tabla:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Departamento de Corte	0.2 hr	0.4 hr	0.3 hr
Departamento de Cosido	0.3 hr	0.5 hr	0.4 hr
Departamento de Empaque	0.1 hr	0.2 hr	0.1 hr

Los departamentos de corte, cosido y empaque tienen disponibles como máximo 1160, 1560 y 480 horas de trabajo por semana respectivamente. ¿Cuántas camisas de cada tipo deben de producirse a la semana para ocupar al máximo la capacidad de cada departamento?

1. Plantea el sistema de ecuaciones que representa al problema
2. Realiza las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.
3. Aplica alguno de los métodos que se han visto en esta unidad para resolver el sistema
4. Comprueba tus resultados

### ACTIVIDAD 14

La altura de un objeto que se mueve verticalmente en el planeta Tierra está dada por la ecuación  $h = 0.5at^2 + v_0t + h_0$ ; en donde:  $a$  es la aceleración del objeto,  $t$  es el tiempo después de iniciado el evento,  $v_0$  es la velocidad inicial del objeto (en el tiempo  $t_0$ ),  $h_0$  es la altura inicial. Calcula los valores de  $a$ ,  $v_0$  y  $h_0$ , si la altura del objeto es 11.1 metros en un segundo, 27 metros en dos segundos, 52.7 metros en tres segundos.

1. Plantea el sistema de ecuaciones que representa al problema.
2. Realiza las operaciones necesarias para tener un sistema equivalente.
3. Aplica alguno de los métodos que se han visto en esta unidad para resolver el sistema.
4. Comprueba tus resultados.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. La alcancía de un niño contiene dos veces más monedas de diez centavos que de cinco centavos y cuatro veces más monedas de un centavo que monedas de cinco. Hay 42 monedas en la alcancía ¿Cuál es el valor total de las monedas?
2. En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos cuesta 56 pesos. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta 46 pesos. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta 68 pesos ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?
3. Una farmacia vende 10 frascos de vitamina A, 5 frascos de vitamina C y 25 frascos de vitamina D, todo por un valor de 355 pesos. Además, vende 20 frascos de vitamina A, 10 de vitamina C y 10 de vitamina D por un total de 310 pesos. Por otra parte, vende 12 frascos de vitamina A, 4 de vitamina C y 15 de vitamina D por un total de 266 pesos. Encuentra el costo correspondiente a cada frasco de las vitaminas A, C y D.
4. Un laboratorista tiene tres soluciones que contienen cierto ácido. La primera solución contiene 10% de sustancia ácida, la segunda 30% y la tercera 50%. Desea utilizar las tres soluciones para obtener una mezcla de 60 litros que contenga 30% de ácido, utilizando tres veces más solución de la solución de 50% que la de 30% ¿Cuántos litros de cada solución debe usar?
5. Una mujer compró tres clases diferentes de acciones por \$20,000. Una de ellas paga un 6% anual de intereses, otra paga un 7%, y la otra un 8% anual. Al final del primer año, la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 7% es de \$940, y la suma de los intereses de las acciones al 6% y al 8% es de \$720. ¿Cuánto invirtió en cada una de las acciones?
6. La suma de las áreas de dos cuadrados es  $106 \text{ m}^2$  y la suma de sus perímetros es 56 m. Determina la medida de los lados de los cuadrados.
7. El perímetro de un rectángulo es 46 m. La medida de la diagonal es de 17 m. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo.
8. ¿Cuáles son los números cuyo producto es 270 y cuyo cociente es 1.2?
9. Un círculo es tangente exteriormente a otro. La suma de sus áreas es de  $80\pi \text{ cm}^2$ . Determina el radio de cada círculo, sabiendo que sus centros están separados 12 cm.
10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de que no tengan solución, argumenta tu respuesta. Cuando tengan soluciones infinitas, encuentra al menos tres de ellas.

$$\text{a.} \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b.} \begin{cases} 5x - y + z = -1 \\ x + 3y = 7 \\ y = -6 - 2z \end{cases}$$

$$\text{c.} \begin{cases} 3x + z = 7 + y \\ 4x + 2y - 7z = -4 \\ -3z = 14 - 10x \end{cases}$$

$$\text{d.} \begin{cases} x = \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}z + \frac{17}{4} \\ 6x + 2y - 3z = 15 \\ 14x - 4y + 9z = 51 \end{cases}$$

$$\text{e.} \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 6x - 3y - 12z = 24 \\ x + y + z = -20 \end{cases}$$

$$\text{f.} \begin{cases} -5x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{g.} \begin{cases} x = 2y - z - 5 \\ 3x + y - 4z = 8 \\ -5x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{h.} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{i.} \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 34 \\ 4x_2 - 3x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{j.} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

11. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, después gráficalos y ubica la solución gráfica:

$$\text{a)} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x - 2y = 8 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x \cdot y = 72 \\ x^2 + y^2 = 145 \end{cases}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Phillips, Elizabeth, et al. **Álgebra con Aplicaciones**. Harla.
- 2) Rees, Paul. Sparks, Fred. **Álgebra Contemporánea**. McGraw Hill.
- 3) Grossman, Stanley. **Álgebra Lineal**. McGraw Hill.
- 4) Larson, Ronald, et. al. **Álgebra intermedia**. McGraw Hill.
- 5) Barnett, Raymond. **Álgebra y Trigonometría**. McGraw Hill.
- 6) Barnett, Raymond. **Precálculo**. Limusa.